بسم الله الرحمن الرحيم

GEOMETRY

10+11+12

Password ن وَ القَلَـمِ وَمَـا يَسْطُـرُونَ

Other user

ENG

IR-MCI LTE 00:00 AM 100%

I ❤ gaj

دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های منتشـــرشده لطفا به سایت www.gaj.ir مراجعه نمایید.

انتشارات بین‌المللی گاج

میکرو طبقه بندی

جزوه های تیپ بندی

هندسه جامع کنکور

تست های طبقه بندی

ناشر	انتشارات بین‌المللی گاج
مدیر مسئول	مهندس ابوالفضل جوکار
معاونت علمی	مهندس محمد جوکار
مدیر تالیف	مهندس علی منصف شکری
عنوان کتاب	هندسه جامع کنکور
مؤلفان	علی منصف شکری ـ محمدرضا حسینی‌فرد
ویراستاران علمی	مریم ساسانی، امین خوانین‌زاده، ایمان وهابی، مرجان ده‌حقی، پیام طیوب
مدیرفنی	مرجان جلال
صفحه آرا	مرجان جلال
طراح جلد	سعید شمس، کاوه پژوهان
گرافیست	مینا بابا احمدی فرد
چاپ و صحافی	گاج
مدیر چاپ	علی مزرعتی
نوبت چاپ	اول (۱۳۹۹)
شمارگان	۳۰۰۰ نسخه
قیمت	۱۵۵۰۰۰ تومان
صندوق پستی	۱۳۱۴۵ - ۳۷۷
تلفن	۰۲۱ - ٦٤۲۰
نشانی	فروشگاه مرکزی ـ تهران ـ میدان انقلاب ـ نبش بازارچه کتاب

شناسنامه

سرشناسه: منصف‌شکری ، علی ، ۱۳٥٤
عنوان: هندسه جامع کنکور
مولف: علی منصف شکری
شناسه افزوده: حسینی‌فرد، محمدرضا
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج، ۱۳۹۹
مشخصات ظاهری: ٦۷۲ص، مصور
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های میکروطبقه بندی گاج می‌باشد.
بها: ۱۵۵۰۰۰ هزار تومان
نوبت چاپ: اول
شابک: ۳-۰٤٥۹-۰۳- ۶۲۲-۹۷۸
شماره کتابشناسی ملی: ۷۲۸٥۹۱٤

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

gaj.ir

3K
تعداد عناوین چاپ شده تا امروز

101 M
تعداد جلدهای چاپ شده تا امروز

2K
تعداد مؤلفین همکار

گاج ، گروه آموزشی جوکار
Since2002 Sep 3

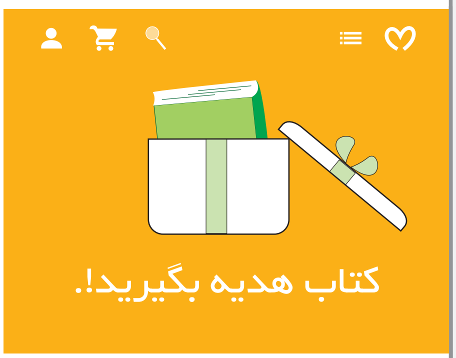
gaj.ir | gajmarket.com | Mygaj.com | driq.com | gajino.com

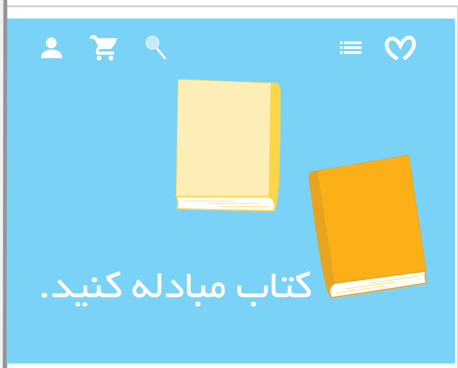
به نام خدا

دوست خوب نادیده‌ام، سلام

در تهیه کاغذ این کتاب هیچ درختی قطع نشده است و در فرایند تولید آن نیز از مواد شیمیایی مضر استفاده نگردیده است. این کاغذ در کشور عزیزمان ایران تولید می‌شود و ماده اصلی تشکیل‌دهنده آن باگاس یا همان تفاله نیشکر است. امروزه در خیلی از کشورها رنگ کاغذ مصرفی کتاب، تیره است و این تیرگی به علت انعکاس نور کمتر باعث می‌شود چشم‌ها هنگام مطالعه خستگی کمتری را احساس کنند. اما بدانیم که هزینه‌های تولید کتاب بالاست، لذا تقاضا دارم بعد از مطالعه کتاب حاضر آن را در وب سایت www.mygaj.com قرار دهید و باقیمت کمتر به عنوان کتاب دست دوم بفروش برسانید تا سایر دوستانتان بتوانند با هزینه کمتر از آن استفاده کرده و از تولید مجدد آن جلوگیری و در نهایت در مصرف کاغذ صرفه‌جویی شود.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار



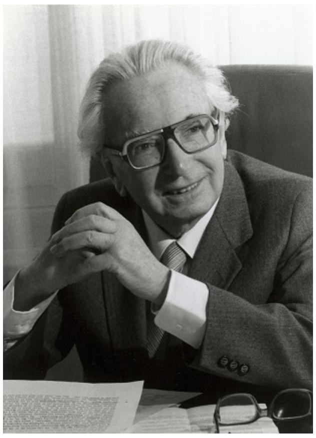


IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Ali.Monsef Shokri

70	1.2 M	36
تعداد عناوین تألیفی از این مؤلف	تعداد جلدهای چاپ شده تا امروز	تعداد مؤلفین همکار

بد نیست بدانید تألیف این کتاب تقریباً **چند روز** برای **من** ، **چند هفته** برای من و **مهندس حسینی‌فرد** برای تکمیل برخی تست‌ها و درسنامه‌ها، **چند ماه** برای من و **مهندس اسمعیلی** برای ارتقاء کیفیت محتوا و پوشش تمام نقاط تاریک کتاب درسی، متجاوز از **یک سال** برای من و **خانم جلال** برای مرتب سازی و صفحه‌آرایی و مجموعاً **۷۶ سال** برای من و **استیو جابز** برای طراحی ساختار و رسیدن به این معماری زمان برده است!!!



Dr.Viktor Frankl

دکتر ویکتور فرانکل در نامه‌ای خطاب به معلمان سراسر جهان برای تمام تاریخ این‌گونه می‌نویسد: من اتاق‌های گازی را دیدم که توسط بهترین مهندسین طراحی می‌شدند، من پزشکان ماهری را دیدم که کودکانی معصوم و بی‌گناه را به راحتی مسموم می‌کردند، من پرستارانی کاربلد را دیدم که انسان‌ها را با تزریق یک آمپول به قتل می‌رساندند و مجموع این دلایل مرا به آموزش مشکوک کرد. از شما تقاضا می‌کنم که تلاش کنید قبل از تربیت دانش‌آموزانتان به عنوان یک دکتر یا یک مهندس از آن‌ها یک انسان بسازید تا روزی تبدیل به جانوران روانی دانشمند نشوند !!!

به دانش‌آموزان خود بیاموزید بهترین ثروت آن‌ها انسانیت است.

Neil.Gaiman

من فهرستی از آن‌چه در مدرسه به ما یاد نمی‌دهند را تهیه کرده‌ام:

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه کسی را دوست بداریم.

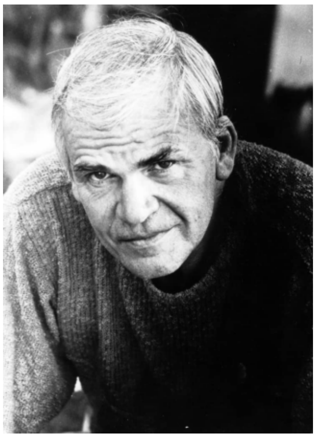
آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در شهرت به درستی زندگی کنیم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در گمنامی، از زندگی لذت ببریم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه از کسی که دوستش نداریم جدا شویم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که به کسی که در حال مرگ است چه بگوئیم.

آن‌ها به ما هیچ چیزی را که ارزش یاد گرفتن داشته باشد، یاد نمی‌دهند.



Milan.Kundera

هیچ وسیله‌ای برای تشخیص تصمیم درست وجود ندارد، زیرا هیچ مقایسه‌ای امکان‌پذیر نیست.

در زندگی با همه‌چیز برای نخستین بار برخورد می کنیم، مانند هنرپیشه‌ای که بدون تمرین وارد صحنه شود اما اگر اولین تمرین زندگی، خود زندگی باشد، پس برای زندگی چه ارزشی می توان قائل شد؟

این است که زندگی همیشه به یک «طرح» شباهت دارد اما حتی طرح هم کلمهٔ درستی نیست، زیرا طرح همیشه زمینه‌سازی برای آماده کردن یک تصویر است،

اما طرحی که زندگی ماست طرح هیچ چیز نیست! طرحی بدون تصویر است !!!

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Chats

Special thanks

...typing

همکارانی که تجربهٔ فراوان آن‌ها در تدریس و تألیف پشتوانهٔ این کتاب شد :

همکاران تالیف

With Collaboration

- مهندس محمدرضا حسینی‌فرد .... M. Hoseyni fard
- مهندس محسن اسمعیلی .... M . Esmaeili
- مهندس بهرام جلالی .... B . Jalali
- مهندس محمد حسین حشمت‌الواعظین .... M . Vaezin
- مهندس محمد صحت‌کار .... M. Sehat kar
- مهندس کیوان دارابی .... K . Darabi

May29

virastarni ke ba deghat va hoseleye bimanand satr be satr ketab ra khandand :

ویراستاران علمی

Board Editorial

- مهندس مریم ساسانی .... M. Sasani
- دکتر پیام طیوب .... Dr . P. tayoub
- دکتر آرمان آشتاب .... Dr . A. Ashtab
- مهندس امین خوانین‌زاده .... A . KHavanin Zadeh
- مهندس ایمان وهابی .... E . Vahabi
- مهندس مرجان ده‌حقی .... M. Deh haghi

Today

کارشناسان خبره‌ای که دانش و تجربهٔ خود را با ما به اشتراک گذاشتند :

کارشناسان علمی

Expert Scientific

- مهندس نوید اورازانی شجاعی .... N. O. Shojaee
- مهندس مجید علائی نسب .... M.alae nasab
- مهندس محمد ارباب بهرامی .... M. Arbab bahrami
- مهندس حسین خزائی .... H. khazaee
- مهندس حسین پیرزاد .... H. Pirzad
- مهندس سوگند روشنی .... S. Roshani

Message

طوفانی از کتاب‌های حرفه‌ای در راه است ...

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Search **CONTENTS**

Matrix C-sections Vectors

CHAPTER 1

Matrix

CHAPTER 2

Conic sections

CHAPTER 3

Vectors

IR-MCI LTE 00:01 AM 100 %

Tweet

Bertrand Russell
@Bertrand 1872

از خود انسانیت به یادگار بگذارید نه انسان! تولیدمثل را هر جانوری بلد است

Remind yourself of humanity , not man! every animal know how to reproduce

درس اول : .... ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

درس دوم : .... وارون ماتریس و دترمینان

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

پرفسور برتراند راسل ، فیلسوف ، ریاضیدان ، صاحب نظریه در تئوری مجموعه‌ها ،جامعه‌شناس و برندهٔ نوبل ادبیات و از تأثیر گذارترین فیلسوفان و ریاضیدانان قرن ۲۰ می‌باشد.

5,337 7,412 7,120,910,208

CHAPTER 1

M[atrix]$_{m\times n}$

Add another Tweet


Bertrand Russell
1872-1970

Matrix$_{m\times n}$ CHAPTER 1

درس اول ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی

تعریف ماتریس و مفاهیم اولیهٔ آن

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه یا عنصر نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و ... نشان می‌دهند.

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون
سطر اول C $C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ سطر دوم B	ستون سوم A $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$ درایه

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به‌صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (یا به‌طور خلاصه m در n) می‌گویند.

ماتریس ۱ در ۳ $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 3}$ ماتریس ۲ در ۳ ← ۲ سطر و ۳ ستون $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

هر درایهٔ ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شمارهٔ سطر و اندیس دوم شمارهٔ ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم است.

درایهٔ سطر اول و ستون سوم: $D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}_{1\times 3}$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم: $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Test تعداد درایه‌های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{3\times 4}$ ۲) $[a_{ij}]_{2\times 6}$

۳) $[a_{ij}]_{6\times 2}$ ۴) هر سه گزینه برابر است.

۴ تعداد درایه‌ها در یک ماتریس $m\times n$ برابر با $m\times n$ است، بنابراین همهٔ ماتریس‌های داده شده در گزینه‌ها ۱۲ درایه دارند.

۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) در هر سطر ۳ درایه وجود دارد. ۲) تعداد ستون‌ها برابر ۳ است.

۳) تعداد سطرها برابر ۲ است. ۴) در هر ستون ۳ درایه وجود دارد.

۲. اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس $A=[a_{ij}]_{(n-1)\times 3}$ با هم برابر باشد، تعداد درایه‌های کدام ماتریس از سایرین کمتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{n\times 3}$ ۲) $[a_{ij}]_{(n+1)\times 2}$

۳) $[a_{ij}]_{6\times(n-2)}$ ۴) $[a_{ij}]_{5\times(n-1)}$

۳. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a_{ii}=۱$
۲) $a_{۲۱}=۲$
۳) $a_{۳۱}=۲$
۴) $a_{۲۳}=۱$

۴. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ درایه‌های به‌صورت $a_{۲j}$ معرف درایه‌های .... است و دامنهٔ j به‌صورت .... می‌باشد.

۱) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۳$
۲) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۳$
۳) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۲$
۴) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۲$

۵. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & x & ۲ & ۱ \\ y & ۴ & -۱ & ۳ \\ x-۲ & ۹ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگتر باشد، حاصل $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}$ کدام است؟

۱) ۳۶
۲) ۳۷
۳) ۳۴
۴) ۳۵

۶. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}$ چقدر از $\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}$ کمتر است؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

بیان درایه‌ها برحسب i و j

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به‌طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ اگر به‌ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۲$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ ← جمع درایه‌ها $=۲۰$

در ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ اگر به‌ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۳$ داشته باشیم: $b_{ij}=i+j$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$$B=\begin{bmatrix} \underset{b_{۱۱}}{۱+۱} & \underset{b_{۱۲}}{۱+۲} & \underset{b_{۱۳}}{۱+۳} \\ \underset{b_{۲۱}}{۲+۱} & \underset{b_{۲۲}}{۲+۲} & \underset{b_{۲۳}}{۲+۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$ ← جمع درایه‌ها $=۲۱$

در ماتریس $C=[c_{ij}]_{۲\times ۲}$ اگر $c_{ij}=\begin{cases} i\times j & ; i\ge j \\ ۷ & ; i<j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

$i\ge j$ ، $i<j$

$$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times ۱ & ۷ \\ ۲\times ۱ & ۲\times ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$ ← جمع درایه‌ها $=۱۴$

Test در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۲j & ; i\ne j \\ i+j & ; i=j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۲

۲

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱^۲-۲\times ۲ \\ ۲^۲-۲\times ۱ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$ ← جمع درایه‌های ستون دوم $=-۳+۴=۱$

۷. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ اگر درایهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام از رابطهٔ $a_{ij}=i^۲-j$ به دست آید، مجموع درایه‌های ماتریس کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸. در ماتریس $A=[۲i-j^۲]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های واقع بر سطر دوم چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۴-

۹. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟ [i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون]

۱) $[i^۲+j]_{۲\times۲}$ ۲) $[i+j]_{۲\times۲}$

۳) $[۲i-j]_{۲\times۲}$ ۴) $[ij]_{۲\times۲}$

I ❤ gaj

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n (یا $n\times n$) می‌نامیم.

a_{ij} روی قطر اصلی $\Leftrightarrow i=j$	a_{ij} روی قطر فرعی $\Leftrightarrow i+j=n+۱$
$B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰/۲ & ۰ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}$	$C=\begin{bmatrix}۹ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۱ & ۴\\ ۷ & ۵ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times۳}$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه بر اساس رابطهٔ بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & \cdots & a_{۲n}\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

[بالای قطر اصلی] $i<j$

[پایین قطر اصلی] $i>j$

[روی قطر اصلی] $i=j$

Test در ماتریس $A=[۳i+j]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲ لازم نیست همهٔ درایه‌های A را پیدا کنید یافتن درایه‌های زیر قطر اصلی کافیست [در ضمن $a_{ij}=۲i+j$]:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc\\ a_{۲۱} & \bigcirc & \bigcirc\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & \bigcirc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc\\ ۷ & \bigcirc & \bigcirc\\ ۱۰ & ۱۱ & \bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع درایه‌های زیر قطر اصلی $=۷+۱۰+۱۱=۲۸$

۱۰. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ کدام درایه بالای قطر اصلی قرار دارد؟

۱) $a_{۱۱}$ ۲) $a_{۲۲}$ ۳) $a_{۳۱}$ ۴) $a_{۱۳}$

۱۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i-j & ;\ i<j\\ i+j & ;\ i=j\\ ij & ;\ i>j\end{cases}$ مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲. در ماتریس $A=[۴i-j]_{۳\times۳}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i-jx & ;\ i>j\\ ij & ;\ i=j\\ ۲ix+j & ;\ i<j\end{cases}$ اگر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی با مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی برابر باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس‌های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است، که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است.

نمونه‌ای از این ماتریس‌ها به صورت زیر است:

$M_1=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ $\quad M_2=[A \vdots B]$ $\quad M_3=\left[\begin{array}{cc:c}a & b & c\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{A} & d\\ & & e\end{array}\right]$ $\quad M_4=\left[\begin{array}{c:c}A & B\\ \hdashline C & D\end{array}\right]$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن‌ها باید، درایه‌های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیرماتریس‌ها بر حسب تابعی از i و j داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

اگر $A=[1\ \ 2\ \ 3]$ ، $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\5 & 0 & 7\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه‌های قطر اصلی C کدام است؟

$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\5 & 0 & 7\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=2+0+3=5$

در مثال فوق، اگر ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c:cc}2 & 1 & 4\\ \hdashline 5 & \multicolumn{2}{c}{D}\\ 1 & & \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

با توجه به ماتریس C، خواهیم داشت: $D=\begin{bmatrix}0 & 7\\2 & 3\end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر فرعی $=2+7=9$

اگر $A=[i+j]_{1\times3}$ ، $B=[i\times j]_{1\times3}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، ماتریس $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ را بنویسید.

ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$A=[1+1\ \ 1+2\ \ 1+3]$
$B=[1\times1\ \ 1\times2\ \ 1\times3]$ $\Rightarrow C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

بعضی‌ها ممکن است ماتریس C را به صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 1+2 & 1+3\\2\times1 & 2\times2 & 2\times3\end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است و اشتباه آن در درایه‌های سطر دوم است.

Test اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\1 & 4 & 5 & 2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\0 & 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c:c}\ & 3\\ E & \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر اصلی E کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۲

۱

$C=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 0 & 3\\ \hdashline 1 & 4 & 5 & 2\\1 & 1 & 2 & 1\\0 & 5 & 1 & 4\end{array}\right] \Rightarrow E=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\1 & 1 & 2\\0 & 5 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=3$

۱۴. اگر $A=[i+j]_{1\times3}$ و $B=[i^2+j^2]_{2\times3}$ و ماتریس C به‌صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۵. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ ، $a_{ij}=\begin{cases}1 & ;\ i>j\\ i+j & ;\ i=j\\ 3 & ;\ i<j\end{cases}$ را به‌صورت $A=\left[\begin{array}{cc:c}2 & 3 & 3\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{B} & 3\\ & & 6\end{array}\right]$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه‌های قطرفرعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

IR-MCI LTE 00:02 AM 100 %

Tweet

Euclid
@Euclid Mid-4 century BC

در هندسه هیچ راه شاهانه‌ای وجود ندارد.

There is no royal way in geometry

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

اقلیدس پدر هندسه و بنیانگذار هندسه است او نویسندهٔ موفق‌ترین کتاب درسی اصول هندسه است که به مدت ۲۰۰۰ سال شالودهٔ تمام آموزش هندسه در غرب بود.

View Tweet activity

1,337 2,416 8,150,910,208

Add another Tweet

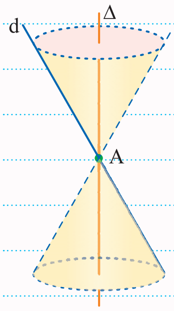
Euclid
Mid-4 century BC

Conic Sections

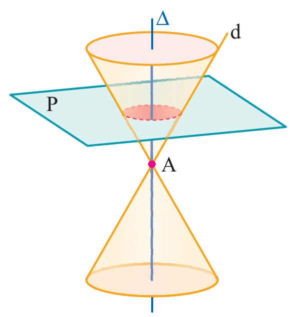
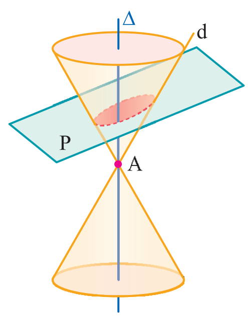
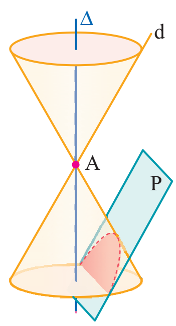
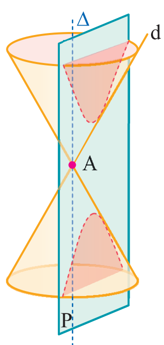
CHAPTER 2

درس اول آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

صفحهٔ ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی



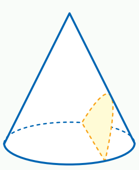
دو خط d و Δ را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دوخط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است:

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P بر محور Δ عمود نبوده و غیر موازی با مولد d است.	صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.
			
حالات خاص			
در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبورکند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبورکند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبورکند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبورکرده و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.

Test مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

۱) موازی یک مولد
۲) موازی محور
۳) عمود بر یک مولد
۴) گذرا از نقطهٔ تلاقی محور و مولد



۱ اگر صفحهٔ موازی با مولد مخروط، رویهٔ مخروطی را قطع کند، سهمی به‌وجود می‌آید.

۳۸۵. دو خط Δ و d در نقطهٔ A متقاطع‌اند، اگر d حول Δ دوران کند، سطح حاصل از دوران را .... و فصل مشترک هر صفحه با آن را .... می‌نامند.

۱) رویهٔ مخروطی - مقطع مخروطی
۲) مقطع مخروطی - رویهٔ مخروطی
۳) رویهٔ مخروطی - سطح مخروطی
۴) سطح مخروطی - رویهٔ مخروطی

۳۸۶. اگر صفحه ای غیر عمود بر محور وغیرموازی با مولد یکی از دامنه‌های رویهٔ مخروطی را قطع کند، سطح مقطع به وجود آمده کدام است؟

۱) بیضی
۲) هذلولی
۳) سهمی
۴) یک خط

۳۸۷. فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) دو خط متقاطع
۲) سهمی
۳) دایره
۴) دو خط موازی

۳۸۸. اگر صفحه‌ای به موازات مولد رویه مخروطی آن را قطع کند، مقطع حاصل کدام می‌تواند باشد؟

۱) بیضی
۲) سهمی
۳) هذلولی
۴) دایره

۳۸۹. اگر صفحه‌ای عمود بر محور سهمی آن را قطع کند، مقطع به وجود آمده کدام می‌تواند باشد؟

۱) بیضی
۲) دایره
۳) سهمی
۴) هذلولی

۳۹۰. اگر صفحه‌ای به موازات محور رویهٔ مخروطی آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل کدام می‌تواند باشد؟

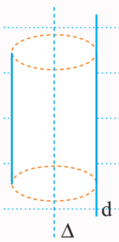
۱) دایره
۲) بیضی
۳) هذلولی
۴) سهمی

۳۹۱. اگر دو صفحهٔ موازی یک سطح مخروطی را قطع کنند، کدام گزینه می‌تواند فصل مشترک‌های ایجاد شده توسط این دو صفحه باشد؟

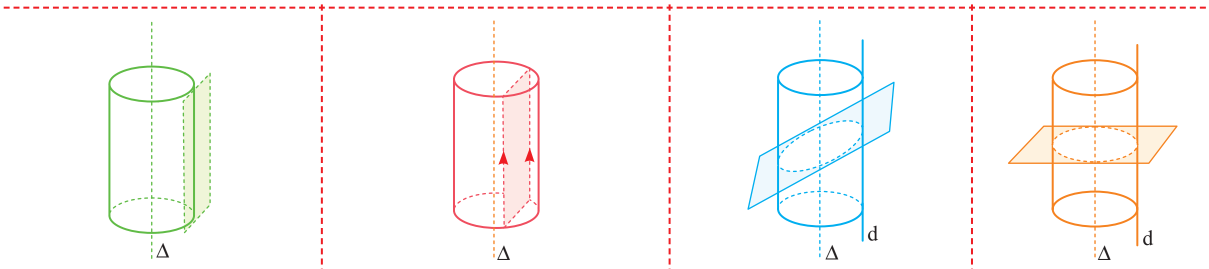
۱) دایره و بیضی
۲) دایره و خط
۳) خط و سهمی
۴) نقطه و سهمی

مقطع استوانه‌ای و کروی

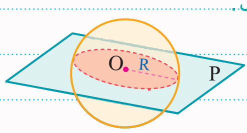
هرگاه دو خط d و Δ موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها برابر r باشد، از دوران d حول Δ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال اگر یک صفحه مانند P سطح استوانه‌ای را قطع کند، سطح مقطع پدید آمده مقطع استوانه‌ای نامیده می‌شود که به یکی از چهار حالت زیر است:



دایره	بیضی	دو خط موازی	یک خط
صفحهٔ P عمود بر Δ	صفحهٔ P غیرعمود و غیرموازی با Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصله کمتر از r از Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصلهٔ r از Δ



اگر یک کره به مرکز O و شعاع R داشته باشیم، سطح مقطع صفحهٔ P با سطح این کره همواره و در تمام حالات یک دایره است.



اگر از تقاطع صفحهٔ P و یک سطح استوانه‌ای یک بیضی ایجاد شده باشد، وضعیت صفحه نسبت به محور سطح استوانه‌ای چیست؟

صفحه باید غیر موازی با محور سطح استوانه‌ای و همچنین غیر عمود بر آن باشد، چون در صورت عمود شدن سطح مقطع به صورت دایره‌ای خواهد بود و در صورت موازی شدن با محور سطح استوانه‌ای به صورت دو خط موازی یا یک خط خواهد بود.

می‌دانیم هر بیضی دارای ۱۰ چیز مهم است که عبارتند از ۷ نقطهٔ مهم $[O, F', F, B', B, A', A]$ و سه پارامتر $[c, b, a]$ حال در بعضی از تست‌ها مختصات بعضی از نقاط مهم و همچنین مقدار بعضی از پارامترها را معلوم می‌کنند و بقیه را می‌خواهند، این تیپ مسائل تنوع زیادی دارند و ما در اینجا به بررسی سه حالت مهم و کلی آن‌ها می‌پردازیم و از هر نمونه یک مثال حل می‌کنیم:

۱ اگر سه نقطه از ۷ نقطهٔ مهم بیضی معلوم باشد، مختصات ۴ نقطهٔ دیگر و ۳ پارامتر بیضی قابل به دست آوردن است.

در یک بیضی نقطهٔ $O(۲,۰)$ مرکز و $A(۷,۰)$ یک سرقطربزرگ و $F(۵,۰)$ یک کانون بیضی است. مختصات بالاترین نقطهٔ بیضی را به‌دست آورید.

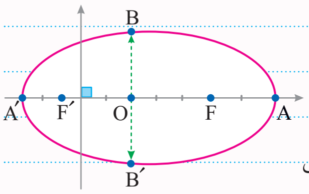
می‌دانیم فاصلهٔ مرکز تا نقطهٔ A برابر a و فاصلهٔ آن تا F برابر c است:

$a = O'A = ۷-۲ = ۵$

$c = O'F = ۵-۲ = ۳$

$\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b = ۴$

با توجه به شکل بیضی مختصات بالاترین نقطهٔ بیضی نقطهٔ B است:



$B(۲, ۰+۴) = (۲, ۴)$

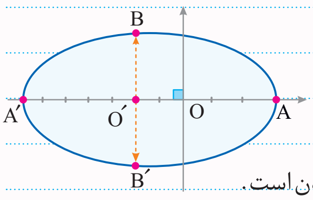
۲ اگر دو نقطهٔ هم‌نام [مانند A, A' یا B, B' یا F, F' که آن‌ها را یک دوبل می‌نامند.] و یک پارامتر غیرهم‌نام از بیضی معلوم باشد [مثلاً A, A', b یا B, B', c یا F, F', b و ...] سایر مشخصات بیضی قابل به‌دست آوردن است.

در یک بیضی نقاط $A'(-۷,۰)$ و $A(۳,۰)$ دو سر قطر بزرگ با فاصلهٔ کانونی ۸ هستند، مختصات پایین‌ترین نقطهٔ بیضی کدام است؟

با معلومات A و A' مختصات مرکز و مقدار $۲a$ قابل به‌دست آوردن است:

$$O' = \frac{A+A'}{۲} = \frac{(-۷,۰)+(۳,۰)}{۲} = \frac{(-۴,۰)}{۲} = (-۲,۰)$$

از طرف فاصلهٔ کانونی $۲c = ۸$ است، بنابراین $c = ۴$ است و در نتیجه $b = ۳$ به‌دست می‌آید، حال با توجه به مختصات نقاط A و A' معلوم است که بیضی افقی است و پایین‌ترین نقطهٔ بیضی B' است.



$B'(-۲, ۰-۳) = (-۲, -۳)$

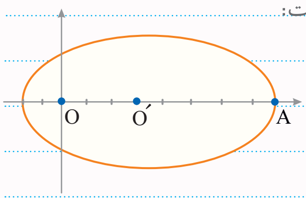
۳ با معلوم بودن مختصات مرکز و دو پارامتر بیضی و معلوم بودن نوع بیضی مختصات سایر نقاط قابل به‌دست آوردن است.

در یک بیضی افقی به مرکز $O'(۳,۰)$ قطر کوچک برابر ۸ و فاصلهٔ کانونی برابر ۶ است. مختصات دورترین نقطهٔ بیضی از مبدأ کدام است؟

در این بیضی $۲b = ۸$ و $۲c = ۶$ است، بنابراین:

$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \Rightarrow a = ۵$

حال با توجه به مختصات مرکز و معلوم بودن نوع بیضی معلوم است که دورترین نقطهٔ بیضی به مبدأ نقطهٔ A است:



$A(۳+۵, ۰) = (۸, ۰)$

Test در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F'(۲-\sqrt{۵}, ۰)$ و $F(۲+\sqrt{۵}, ۰)$ و نقطهٔ $A(۵,۰)$ یک سر قطر بزرگ بیضی است، مختصات پایین‌ترین نقطهٔ بیضی کدام است؟

۱) $(۴,۰)$ ۲) $(۲,۳)$

۳) $(۲,-۲)$ ۴) $(۰,۰)$

۳ برای حل تست مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ مرکز بیضی وسط F' و F است:

$$O' = \frac{F+F'}{۲} = \frac{(۲-\sqrt{۵}, ۰)+(۲+\sqrt{۵}, ۰)}{۲} = (۲, ۰)$$

۲ فاصلهٔ نقاط F' و F از هم برابر $۲c$ است، بنابراین:

$$۲c = FF' = |۲+\sqrt{۵} - (۲-\sqrt{۵})| = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

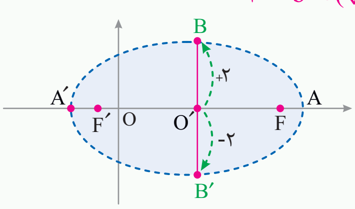
۳ فاصلهٔ مرکز بیضی از نقطهٔ A برابر با a است، بنابراین:

$$a = O'A = |۵-۲| = ۳$$

۴ به کمک رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$۳^۲ = b^۲ + (\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

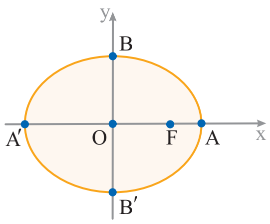
۵ با توجه به مختصات F' و F معلوم است که بیضی داده شده افقی است، بنابراین مختصات نقاط B' و B مطابق شکل برابر است با:



$B, B'(۲, ۰ \pm ۲)$

بنابراین گزینهٔ ۳ پایین‌ترین نقطهٔ بیضی است.

۵۹۶. در شکل زیر مرکز بیضی بر مبدأ مختصات واقع است اگر طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به ترتیب برابر $۲\sqrt{۵}$ و ۴ باشد، مختصات کانون بیضی کدام است؟



۱) $(۲,۰)$
۲) $(۱,۰)$
۳) $(\sqrt{۳},۰)$
۴) $(\sqrt{۲},۰)$

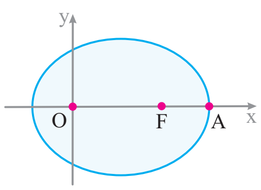
۵۹۷. مرکز یک بیضی مبدأ مختصات و قطر بزرگ منطبق بر محور x ها و مختصات یک سر آن $A'(-۴,۰)$ است اگر مختصات کانون بیضی $F(۲,۰)$ باشد، مختصات یک سر قطر کوچک کدام است؟

۱) $(\sqrt{۳},۰)$
۲) $(۰,\sqrt{۳})$
۳) $(۲\sqrt{۳},۰)$
۴) $(۰,۲\sqrt{۳})$

۵۹۸. یک بیضی از نقاط $A(-۲,۰), B(۰,۴), C(۲,۰), D(۰,-۴)$ می‌گذرد، و محورهای تقارن آن محورهای مختصات است، مختصات یکی از کانون‌های این بیضی کدام است؟

۱) $(۲\sqrt{۳},۰)$
۲) $(۰,۲\sqrt{۳})$
۳) $(-۲\sqrt{۳},۰)$
۴) $(۰,-\sqrt{۳})$

۵۹۹. در بیضی شکل زیر نقاط $F(۶,۰)$ و مبدأ مختصات کانون‌های بیضی و نقطهٔ $A(۸,۰)$ بر قطر بزرگ بیضی واقع باشد، مختصات نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی به مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $(-۱,۰)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(-۳,۰)$
۴) $(۰,۳)$

۶۰۰. در یک بیضی مرکز منطبق بر مبدأ مختصات و قطر بزرگ منطبق بر نیمساز ربع اول و سوم است، اگر اندازهٔ قطرهای بیضی $۴\sqrt{۲}$ و ۴ باشد، مختصات بالاترین کانون بیضی کدام است؟

۱) $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$
۲) $(۲,۲)$
۳) $(۲,\sqrt{۲})$
۴) $(۱,۱)$

۶۰۱. در یک بیضی نقاط $A(۵,۰)$ و $A'(-۵,۰)$ دو سر قطر بزرگ و $F(۳,۰)$ یکی از کانون‌هاست، مختصات پایین‌ترین نقطهٔ بیضی کدام است؟

۱) $(۰,۴)$
۲) $(-۴,-۳)$
۳) $(۰,-۳)$
۴) $(۰,-۴)$

۶۰۲. در یک بیضی نقاط $B(۳,۲)$ و $B'(-۳,۲)$ دو سر قطر کوچک و $F'(۶,۰)$ یکی از کانون‌های بیضی است، مختصات بالاترین نقطهٔ بیضی کدام است؟

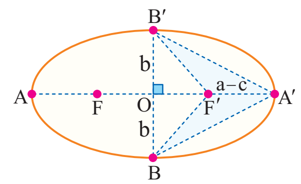
۱) $(۳,۵)$
۲) $(۰,۵)$
۳) $(۰,۷)$
۴) $(۰,۶)$

۶۰۳. در یک بیضی افقی به مرکز $O(-۲,۰)$ قطر کوچک برابر ۶ و فاصلهٔ کانونی برابر ۸ است. مختصات دورترین نقطهٔ بیضی از مبدأ کدام است؟

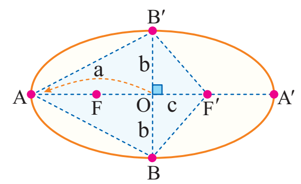
۱) $(-۶,۰)$
۲) $(-۷,۰)$
۳) $(-۵,۰)$
۴) $(-۴,۰)$

در بسیاری از تست‌ها یک مثلث یا چهارضلعی به‌کمک نقاط مهم بیضی $[O, F', F, B', B, A', A]$ ساخته می‌شود و مساحت یا محیط آن‌ها و یا رابطهٔ بین مساحت و محیط چند ضلعی‌های ساخته شده را می‌خواهند، نمونه‌ای از این اشکال را با هم ببینیم:

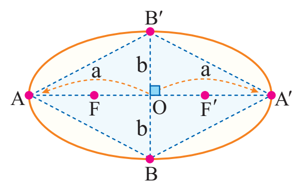
نمونه‌ای از چهارضلعی‌ها



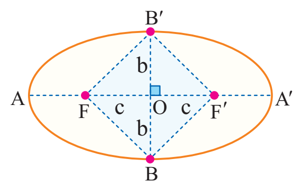
$S=\frac{۱}{۲}(a-c)(۲b)$



$S=\frac{۱}{۲}(۲b)(a+c)$

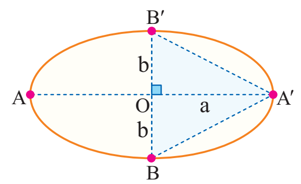


$S=\frac{۱}{۲}(۲a)(۲b)$

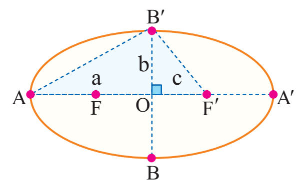


$S=\frac{۱}{۲}(۲c)(۲b)$

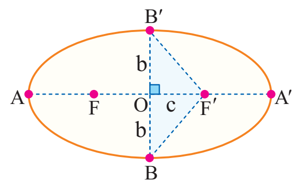
نمونه‌ای از مثلث‌ها



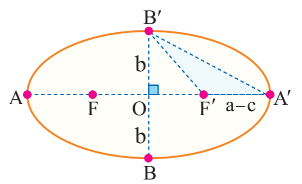
$S=\frac{۱}{۲}(a)(۲b)$



$S=\frac{۱}{۲}(b)(a+c)$



$S=\frac{۱}{۲}(c)(۲b)$

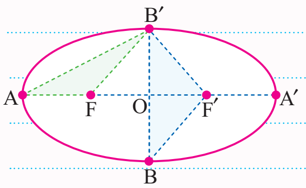


$S=\frac{۱}{۲}(b)(a-c)$

در همهٔ این اشکال برای محاسبهٔ محیط و مساحت شناخت پارامترهای بیضی یعنی c, b, a از روی شکل و دانستن نحوهٔ محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث و چهار ضلعی برای حل مسئله کافیست و نیازی به حفظ کردن رابطهٔ خاصی نیست، چون تعداد این نوع مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها بسیار زیاد و متنوع است و اشکال رسم شده صرفاً نمونه‌ای از آن‌ها هستند.

در بیضی شکل زیر اندازهٔ قطرها ۱۰ و ۸ است و F' و F کانون‌های بیضی هستند، نسبت مساحت دو مثلث رنگ شده را به‌دست آورید.

با توجه به این‌که $۲a=۱۰$ و $۲b=۸$ است، مقدار c را به دست می‌آوریم:



$$a=۵,\ b=۴ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۲۵=۱۶+c^۲ \Rightarrow c^۲=۹ \Rightarrow c=۳$$

۱) $S_{AB'F}=\frac{۱}{۲}(a-c)\times b=\frac{۱}{۲}(۵-۳)\times ۴=۴$

۲) $S_{B'BF'}=\frac{۱}{۲}(۲b)(c)=bc=۴\times ۳=۱۲$

$$\frac{S_{B'BF'}}{S_{AB'F}}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

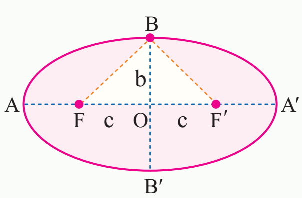
Test بیش‌ترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی به اقطار ۸ , $۲\sqrt{۷}$ است و دو رأس دیگرآن برکانون‌های بیضی قرار داردکدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) ۱۲

۳) $۳\sqrt{۷}$ ۴) $۴\sqrt{۷}$

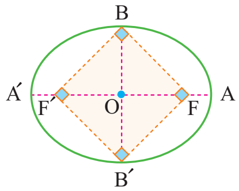
۳ بیش‌ترین مساحت زمانی حاصل می‌شود که رأس سوم روی رأس ناکانونی بیضی قرار بگیرد، پس ابتدا مقدار c را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲a=۸ \Rightarrow a=۴ \\ ۲b=۲\sqrt{۷} \Rightarrow b=\sqrt{۷} \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۱۶-۷}=۳$$



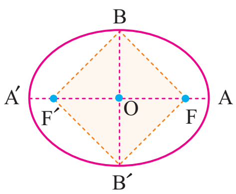
$$S_{Max}=\frac{۱}{۲}(۲c)(b)=bc=\sqrt{۷}\times ۳=۳\sqrt{۷}$$

۶۰۴. در بیضی شکل مقابل اگر مساحت چهار ضلعی رنگ شده ۱۶ باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین وتر بیضی چقدر است؟



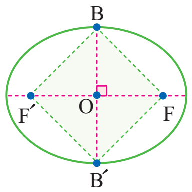
۱) ۴
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۸

۶۰۵. در شکل زیر نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، اگر طول قطر بزرگ بیضی برابر ۶ باشد، محیط چهار ضلعی رنگ شده چقدر است؟



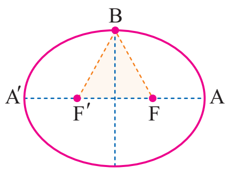
۱) ۲۴
۲) ۱۸
۳) ۶
۴) ۱۲

۶۰۶. در بیضی شکل زیر، نقاط F و F' کانون‌های بیضی و مساحت چهار ضلعی رنگ شده برابر ۲۴ و مجموع طول دو قطر آن ۱۴ باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین وتر بیضی کدام است؟



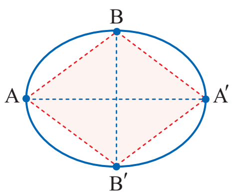
۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۶۰۷. مطابق شکل نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند. اگر مثلث رنگ شده، متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{3}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟



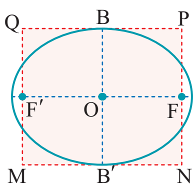
۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) $\sqrt{2}$

۶۰۸. در یک بیضی به فاصلهٔ کانونی $FF' = 6$ اگر طول قطر بزرگ برابر ۱۰ باشد، مساحت چهار ضلعی که قطرهای آن منطبق بر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی باشد، چقدر است؟



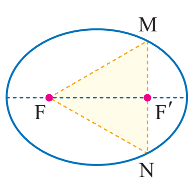
۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۱۰

۶۰۹. مطابق شکل نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند و اضلاع مستطیل $MNPQ$ در نقاط B و B' بر بیضی مماس شده‌اند. اگر طول قطر بزرگ و کوچک بیضی به ترتیب ۱۷ و ۸ باشد، مساحت مستطیل $MNPQ$ چقدر است؟



۱) ۸۵
۲) ۱۲۰
۳) ۱۰۵
۴) ۱۷۰

۶۱۰. در بیضی شکل مقابل قطر کوچک برابر ۱۰ و فاصلهٔ دو کانون بیضی ۲۴ است، محیط مثلث رنگ شده کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)

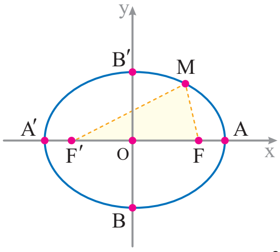


۱) ۲۶
۲) ۴۸
۳) ۵۶
۴) ۵۲

۶۱۱. دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. می‌دانیم A به کانون F' و همچنین B به کانون F نزدیک‌تر است اگر $AF' = BF$ باشد و دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، چهار ضلعی $BFAF'$ چگونه است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) کایت
۲) لوزی
۳) متوازی‌الاضلاع
۴) ذوزنقه متساوی‌الساقین

۶۱۲. در شکل زیر نقطهٔ $F(۲,۰)$ کانون و $A(\sqrt{۵},۰)$ رأس کانونی بیضی است. اگر نقطهٔ M روی بیضی قرار داشته باشد، حداکثر مساحت مثلث MFF' چقدر است؟



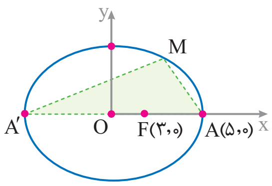
۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) ۴

۴) $۴\sqrt{۳}$

۶۱۳. در شکل زیر F کانون بیضی است، اگر نقطهٔ M روی بیضی حرکت کند، بیش‌ترین مساحت برای مثلث MAA' کدام است؟



۱) ۴۰

۲) ۲۵

۳) ۱۰

۴) ۲۰

۶۱۴. نقطهٔ M روی یک بیضی به فاصلهٔ کانونی ۷ و قطربزرگ به اندازهٔ ۱۳ قرار دارد. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند و $F\widehat{M}F' = ۶۰^\circ$ مساحت مثلث MFF' چقدر است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۰

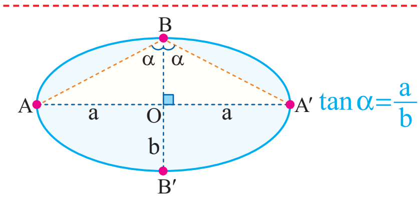
۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

زاویهٔ رویت پاره‌خط‌های مهم در بیضی [تمرین ۵ صفحهٔ ۵۲]

در بعضی تست‌ها مشخصاتی از بیضی داده می‌شود و زاویه‌ای را می‌خواهند، در این موارد مثلثی که آن زاویه یا نصف زاویه درون آن قرار دارد را در نظر می‌گیریم و به کمک نسبت‌های مثلثاتی [سینوس، کسینوس، تانژانت] آن زاویه یا نصف آن را پیدا می‌کنیم.

ممکن است به جای آن‌که به طور مستقیم اندازهٔ زاویه پرسیده شود، گفته شود پاره خط AB از نقطهٔ M با چه زاویه‌ای رؤیت می‌شود که در این صورت منظور محاسبهٔ زاویهٔ $A\widehat{M}B$ است.

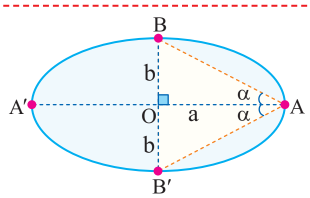
زاویهٔ رؤیت دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک



$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

جواب $= ۲\alpha$

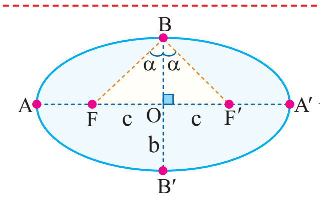
زاویهٔ رؤیت دو سر قطر کوچک از انتهای قطر بزرگ



$\tan\alpha = \frac{b}{a}$

جواب $= ۲\alpha$

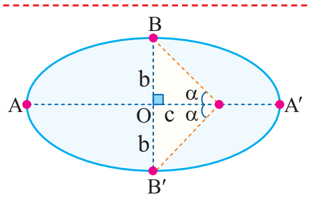
زاویهٔ رؤیت دو سر کانون از انتهای قطر کوچک



$\tan\alpha = \frac{c}{b}$

جواب $= ۲\alpha$

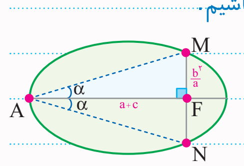
زاویهٔ رؤیت دو سر قطر کوچک از کانون



$\tan\alpha = \frac{b}{c}$

جواب $= ۲\alpha$

ممکن است در بعضی مسائل زاویهٔ رویت بعضی پاره‌خط‌های دیگر خواسته شود، مثلاً ممکن است، زاویهٔ رویت وتر کانونی از مرکز بیضی، کانون دیگر یا رأس‌های بیضی خواسته شود، در این تیپ مسائل نیز باید طول وتر کانونی را که در صفحات بعد می‌خوانیم در ذهن داشته باشیم.



$$\tan\alpha = \frac{b^۲}{a(a+c)}$$

۶۵۳. در یک بیضی نقاط $A'(-5,0)$ و $A(5,0)$ دو سرقطربزرگ بیضی و $B(0,3)$ بالاترین نقطهٔ بیضی است، در این بیضی دایره‌ای که دو سرقطرآن کانون‌های بیضی باشد،بیضی را در چند نقطه قطع می‌کند؟

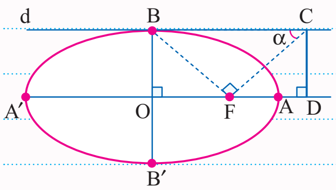
۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۵۴. یک بیضی به کانون‌های F و F' با دایرهٔ به قطر FF' نقطهٔ مشترک ندارد. کدام گزینه می‌تواند خروج از مرکز این بیضی باشد؟

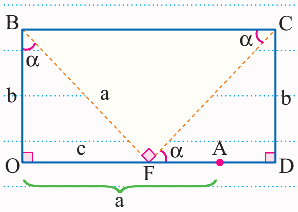
۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴) $\frac{3}{4}$

بررسی تمرین ۴ صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی

در بیضی زیر AA' و BB' دو قطر بیضی هستند، خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $B\hat{C}F=\alpha$ باشد، می‌توان نشان داد:



$$\boxed{\frac{AD}{AF}=\frac{1}{e}}$$



درمثلث OBF و BFC متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{a}{BC}=\frac{c}{a}=\frac{b}{CF}\Rightarrow BC=\frac{a^2}{c}$$

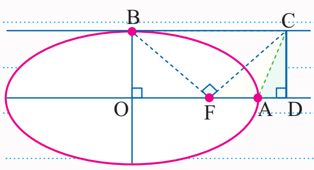
با توجه به این‌که $AD=OD-OA$ و همچنین $AF=OA-OF$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AF}=\frac{OD-OA}{OA-OF}=\frac{BC-OA}{OA-OF}=\frac{\frac{a^2}{c}-a}{a-c}=\frac{a^2-ac}{c(a-c)}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$$

یک نتیجهٔ جالب و مهم از رابطهٔ فوق رابطهٔ خروج از مرکز و زاویهٔ α است؛ اگر به مثلث OBF نگاه کنیم خواهیم داشت:

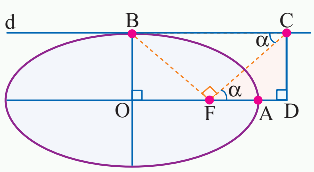
$$\boxed{\sin\alpha=\frac{c}{a}=e}\qquad \boxed{\frac{AD}{AF}=\frac{1}{\sin\alpha}}$$

نسبت مساحت دو مثلث ACD و ACF نیز برابر با نسبت قاعده‌های دو مثلث است، بنابراین:



$$\boxed{\frac{S_{ACD}}{S_{ACF}}=\frac{AD}{AF}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{e}}$$

Test در شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است، اگر $\frac{FD}{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



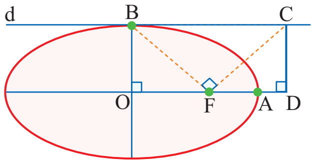
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\frac{3}{4}$

۲ با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\cos\alpha=\frac{FD}{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

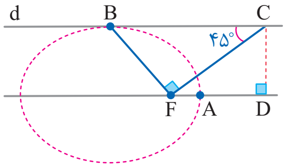
بنابراین $e=\sin\alpha=\frac{1}{2}$ است.

۶۵۵. در شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است، اگر F کانون بیضی و $\frac{AD}{AF}=3$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



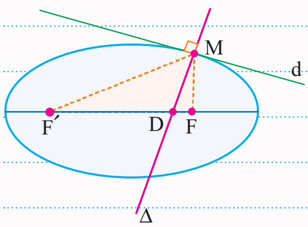
۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{1}{4}$

۶۵۶. در بیضی شکل زیر نقطهٔ F کانون بیضی است و خط d در رأس ناکانونی بیضی بر بیضی مماس است، حاصل $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



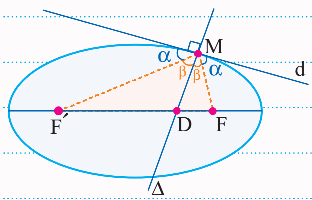
۱) $\sqrt{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $2\sqrt{2}$

در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F′ مماس d را بر آن رسم کرده‌ایم، اگر خط Δ در نقطهٔ M عمود بر d بوده و قطر بزرگ بیضی را در D قطع کند، می‌توان نشان داد:



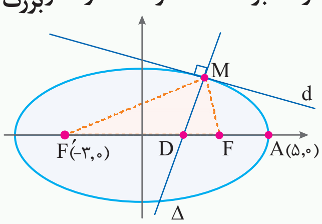
$$e=\frac{DF}{MF}$$

در صفحات بعد خواهیم دید **زاویهٔ شعاع های حامل با خط مماس با هم برابراست**، بنابراین متمم‌های آن‌ها نیز با هم برابر است [$\beta=\beta$] در نتیجه Δ در مثلث MFF' نیمساز محسوب می‌شود، بنابراین ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند:



$$\frac{MF}{MF'}=\frac{DF}{DF'}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{MF}{MF+MF'}=\frac{DF}{DF+DF'}\Rightarrow\frac{MF}{2a}=\frac{DF}{2c}\Rightarrow\frac{DF}{MF}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e$$

Test در شکل زیر نقاط F و F′ کانون‌های بیضی هستند و خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده و قطر بزرگ بیضی را در D قطع کرده است، $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟

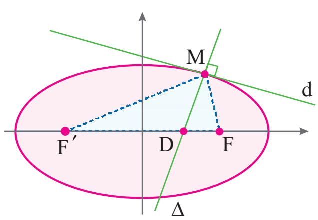


۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{4}{5}$

۲ می‌دانیم $\frac{DF}{MF}=e$ است، بنابراین باید خروج از مرکز بیضی را پیدا کنیم، مطابق شکل داریم:

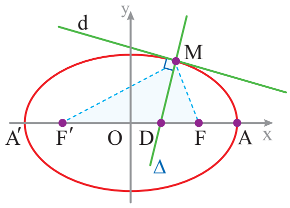
$$\begin{cases}a=5\\c=3\end{cases}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{DF}{MF}=\frac{3}{5}$$

۶۵۷. در شکل زیر نقاط F و F′ کانون‌های بیضی هستند و خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده است. اگر خط Δ قطر بزرگ را در D قطع کند و $\frac{DF}{MF}=\frac{1}{3}$ و اندازهٔ قطر کوچک بیضی $2\sqrt{2}$ باشد، اندازهٔ قطر بزرگ بیضی کدام است؟



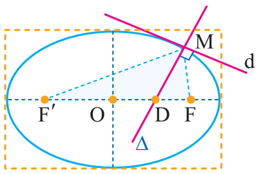
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲/۵
۴) ۳

۶۵۸. در بیضی شکل زیر خط **d** در نقطهٔ **M** واقع بر بیضی بر آن مماس بوده و خط **Δ** در همان نقطه بر **d** عمود است و محور **x** ها را در **D** قطع کرده است. اگر $\frac{DF}{MF}=\frac{1}{3}$ بوده و محیط مثلث MFF' برابر ۲۴ باشد، بیضی محور **x** ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟



۱) $6\sqrt{2}$
۲) ۶
۳) ۹
۴) $6\sqrt{3}$

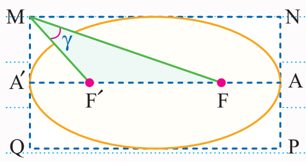
۶۵۹. در مستطیل به اضلاع ۱۰ و ۸ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های **F** و **F′** را قرار داده‌ایم. در نقطهٔ **M** خط **d** را بر بیضی مماس کرده‌ایم و خط **Δ** در **M** بر **d** عمود شده و محور بیضی را در **D** قطع کرده حاصل $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۸
۴) ۰/۶

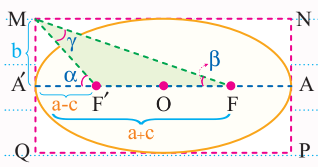
بررسی یک تمرین مهم از کتاب راهنمای معلم

اگر بیضی E مطابق شکل درون مستطیل MNPQ قرار گرفته باشد و از رأس M به کانون‌های بیضی یعنی نقاط F, F' وصل کنیم، می‌توان نشان داد:



$$\boxed{\tan\gamma=\frac{c}{b}}$$

با توجه به این‌که در مثلث MFF' زاویهٔ α زاویهٔ خارجی محسوب می‌شود، بنابراین با جمع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور برابر است:



$$M\hat{A'}F':\tan\alpha=\frac{b}{a-c}$$
$$M\hat{A'}F:\tan\beta=\frac{b}{a+c}$$
$$\Rightarrow \tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{b}{a-c}-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a-c}\times\frac{b}{a+c}}$$

با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\tan\gamma=\frac{\frac{b(a+c)-b(a-c)}{a^2-c^2}}{1+\frac{b^2}{a^2-c^2}}=\frac{\frac{2bc}{b^2}}{1+\frac{b^2}{b^2}}=\frac{2bc}{2b^2}=\frac{c}{b}$$

می‌توان زاویهٔ γ [زاویهٔ رویت پاره خط FF' از رأس‌های مستطیل محیط بر بیضی] را بر حسب خروج از مرکز نیز محاسبه کرد:

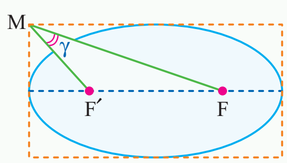
$$\boxed{\tan\gamma=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}$$

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow\begin{cases}(\frac{c}{a})^2+(\frac{b}{a})^2=1\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=1-e^2\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{1-e^2}\\ \frac{a^2}{b^2}=1+\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow\frac{1}{1-e^2}=1+\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{1}{1-e^2}-1}=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\end{cases}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{c}{b}=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

Test درون مستطیل به اضلاع ۶ و $4\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های **F** و **F′** را قرار داده‌ایم، پاره خط **FF′** از یکی از رأس‌های مستطیل با کدام زاویه رویت می‌شود؟

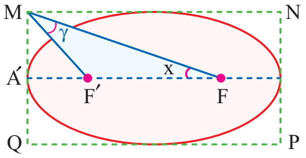
۱) 30°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 120°

۱ شکل مسئله به صورت مقابل است:



$$\begin{cases}2b=6\Rightarrow b=3\\ 2a=4\sqrt{3}\Rightarrow a=2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-9}=\sqrt{3}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\gamma=30^\circ$$

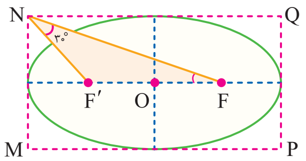
۶۶۰. در بیضی مقابل خروج از مرکز برابر $\frac{۱}{۲}$ و اندازهٔ قطر بزرگ برابر ۴ است، زاویهٔ $M\hat{F}A'$ کدام است؟



۱) ۳۰° ۲) ۶۰°

۳) ۴۵° ۴) ۷۵°

۶۶۱. در شکل مقابل نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

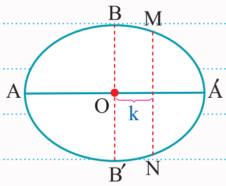


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

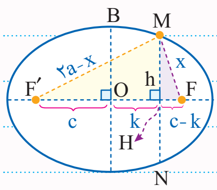
اندازهٔ وترهای عمود بر قطر بزرگ و محدود به بیضی [براساس کار در کلاس صفحهٔ ۱۰۸ کتاب درسی]

اگر یک خط به فاصلهٔ k واحد از مرکز بیضی و عمود بر قطر بزرگ بیضی [موازی قطر کوچک] مطابق شکل بیضی را قطع کند، اندازهٔ پاره‌خط ایجاد شده با سه بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$\boxed{MN=\frac{۲b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲}}$$

برای اثبات کافیست از M به F و F' وصل کنیم، بنابراین داریم:



① $\overset{\Delta}{MHF}: h^۲=x^۲-(c-k)^۲$

② $\overset{\Delta}{MF'H}: h^۲=(۲a-x)^۲-(c+k)^۲$

$$\Rightarrow x^۲-(c-k)^۲=(۲a-x)^۲-(c+k)^۲$$

$$\Rightarrow (۲a-x)^۲-x^۲=(c+k)^۲-(c-k)^۲ \Rightarrow (۲a-x-x)(۲a-x+x)=(۲c)(۲k) \Rightarrow ۴(a-x)(a)=۴ck \Rightarrow x=a-\frac{ck}{a}$$

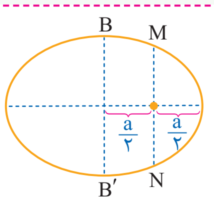
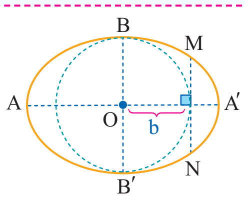
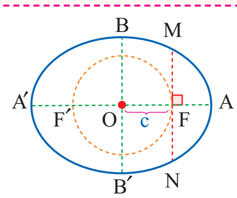
بنابراین با جایگذاری x در ① خواهیم داشت:

$$h^۲=(a-\frac{ck}{a})^۲-(c-k)^۲=a^۲+\frac{c^۲k^۲}{a^۲}-۲ck-(c^۲+k^۲-۲ck)=a^۲-c^۲+\frac{c^۲k^۲}{a^۲}-k^۲$$

$$=b^۲-k^۲(۱-\frac{c^۲}{a^۲})=b^۲-k^۲(\frac{b^۲}{a^۲})=\frac{b^۲}{a^۲}(a^۲-k^۲)\Rightarrow h=\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲} \Rightarrow MN=۲h=\frac{۲b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲}$$

یکی از نتایج جالب اثبات فوق یافتن اندازهٔ شعاع‌های حامل بیضی است، که برابر است با: $\boxed{MF, MF'=a\pm ek}$

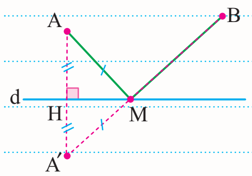
حالات خاص

$k=\frac{a}{۲}$	$k=b$	$k=c$
		
	وتر مماس بر دایرهٔ فرعی	وتر مماس بر دایرهٔ کانونی
$MN=\sqrt{۳}\,b$	$MN=\frac{۲bc}{a}$	$MN=\frac{۲b^۲}{a}$

مسئله هرون [تیپ اول]

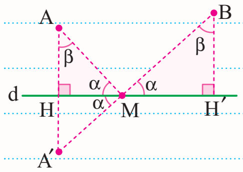
دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط‌شکستهٔ AMB کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

$$\text{Min}(AMB) = |A'B|$$

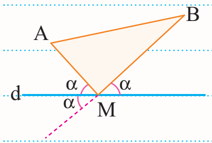


این مسئله به مسئلهٔ هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

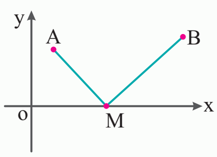
$$\frac{MB}{MA} = \frac{BH'}{AH} = \frac{MH'}{MH}$$



STOP در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطهٔ M نیز با هم برابرند.



Test نقاط $A\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}8\\5\end{vmatrix}$ مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟

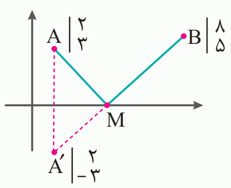


۱) ۱ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۱۰

۴ کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور xها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازهٔ $A'B$ را به‌دست آوریم:

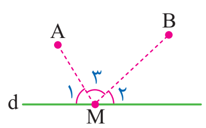
$$|A'B| = \sqrt{(۸-۲)^۲ + (۵-(-۳))^۲} = ۱۰$$



بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

1. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور xها نقطهٔ $A'(a,-b)$ است.
2. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(-a,b)$ است.
3. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمساز ربع اول و سوم] نقطهٔ $A'(b,a)$ است.
4. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمساز ربع دوم و چهارم] نقطهٔ $A'(-b,-a)$ است.

۲۱۳۸. در شکل زیر اگر نقطهٔ M طوری روی خط d قرار گرفته باشد که، MA + MB کم‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$

۲) $\widehat{M}_3 = 2\widehat{M}_2$

۳) $\widehat{M}_3 = 2\widehat{M}_1$

۴) $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

۲۱۳۹. در صفحه خط d و دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای برروی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

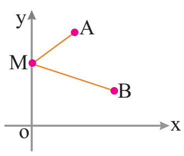
۱) بازتاب
۲) تجانس
۳) دوران
۴) انتقال

۲۱۴۰. در شکل زیربرای رسم مثلث ABC که رأس C از آن روی خط Δ باشد و محیط مثلث حداقل مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) بازتاب
۲) تجانس
۳) انتقال
۴) دوران

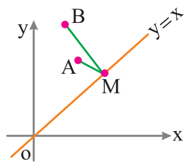
۲۱۴۱. نقاط $A\begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور yها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۸)



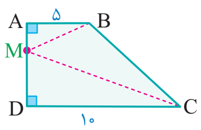
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۲۱۴۲. نقاط $A\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\6\end{vmatrix}$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزد، کمترین اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



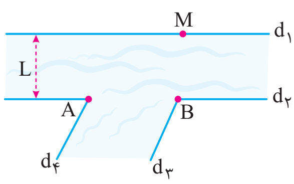
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۱۰

۲۱۴۳. در ذوزنقهٔ قائم شکل مقابل طول ساق قائم ۸ و قاعده‌ها ۵ و ۱۰ هستند. نقطهٔ M روی ساق قائم می‌لغزد، کم‌ترین طول خط شکستهٔ BMC کدام است؟



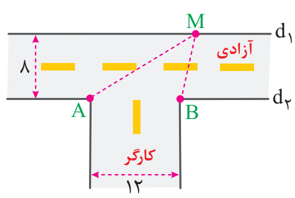
۱) ۱۷
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۴

۲۱۴۴. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم، جای دو اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است، برای پیدا کردن جایگاه اسکلهٔ M که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند، کدام تبدیل مناسب است؟



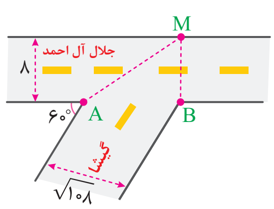
۱) انتقال به اندازهٔ بردار $\vec{L}$
۲) دوران 180° نقطهٔ A حول نقطهٔ B
۳) تجانس با نسبت ۱- نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B
۴) بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d_1

۲۱۴۵. شکل زیر دو خیابان متقاطع آزادی و کارگر با عرض ۸ و ۱۲ را نشان می‌دهد، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A به سمت دیگر خیابان آزادی رفته و سپس به نقطهٔ B برود، طول کوتاه‌ترین مسیر طی شده، توسط شخص کدام است؟



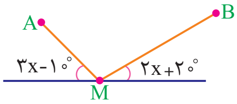
۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۱۵
۴) ۲۵

۲۱۴۶. مطابق شکل دو خیابان گیشا و اتوبان جلال آل‌احمد با زاویهٔ 60° همدیگر را قطع کرده‌اند، شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A در انتهای خیابان گیشا به آن طرف اتوبان جلال آل‌احمد در نقطهٔ M رفته و سپس به نقطهٔ B در انتهای دیگر خیابان گیشا برود. اگر عرض اتوبان جلال آل‌احمد ۸ و عرض خیابان گیشا $\sqrt{108}$ باشد، کم‌ترین طول مسیری که این شخص می‌تواند طی کند، کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۱۵
۴) ۲۴

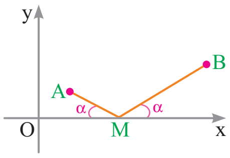
۲۱۴۷. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M طوری قرار گرفته باشد که خط شکسته AMB کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $A\widehat{M}B$ کدام است؟



۱) ۴۰° ۲) ۵۰°

۳) ۶۰° ۴) ۲۰°

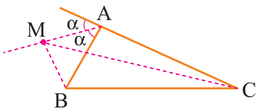
۲۱۴۸. اگر $A(۲,۱)$ و $B(۵,۳)$ و نقطهٔ M مطابق شکل روی محور xها قرار گرفته باشد، اندازهٔ خط شکسته AMB کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

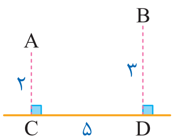
۲۱۴۹. در شکل مقابل، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی $\widehat{A}$ قرار دارد. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کوچک‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) نامشخص

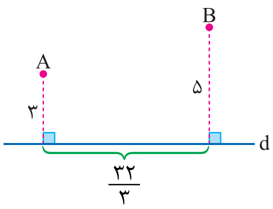
۲۱۵۰. در شکل زیر $CD=۵$, $AC=۲$, $BD=۳$. فرض کنیم نقطهٔ M روی خط d واقع است، کم‌ترین مقدار $AM+MB$ کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۲۱۵۱. در شکل زیر نقطهٔ M را روی خط d طوری به‌دست می‌آوریم که $AM+BM$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



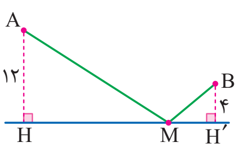
۱) ۷

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۵

۲۱۵۲. در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کم‌ترین مقدار $AM+MB$ برابر ۳۲ باشد، زاویهٔ $H\widehat{A}M$ کدام است؟



۱) ۱۵°

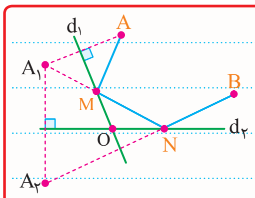
۲) ۳۰°

۳) ۴۵°

۴) ۶۰°

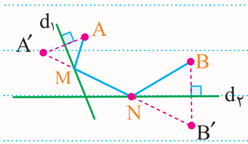
کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ دوم]

دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط $d_۱$ و نقطهٔ N روی خط $d_۲$ بلغزد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کافیست قرینهٔ A را نسبت به $d_۱$ پیدا کرده و $A_۱$ بنامیم، حال اگر قرینهٔ $A_۱$ را نسبت به خط $d_۲$ پیدا کرده و $A_۲$ بنامیم، $A_۲B$ برابر با کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB است.

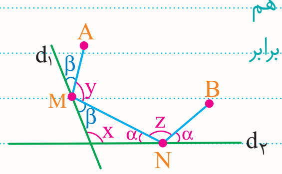


$$\boxed{\text{Min}(AMNB)=|A_۲B|}$$

STOP یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به $d_۱$ و بازتاب B نسبت به $d_۲$ یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکستهٔ AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد و اندازهٔ آن با $|A'B'|$ برابر است.



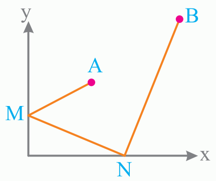
در هر یک از دو روش فوق وقتی AMNB کوتاه‌ترین طول را دارد، زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاه‌ترین طول است. در ضمن در این حالت زاویهٔ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکستهٔ AMNB است یعنی $x=\dfrac{y+z}{۲}$



STOP قضیهٔ فوق را برای بیش از دو خط $d_۱$ و $d_۲$ نیز می‌توان تعمیم داد.

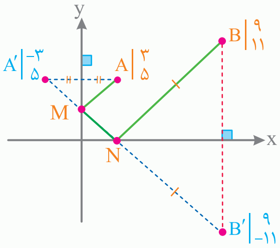
Test نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}9\\11\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱



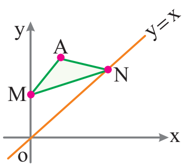
۳ اگر نقطهٔ A را نسبت به محور y و نقطهٔ B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محور xها و yها را در N و M قطع کند، در این صورت خط شکستهٔ AMNB کم‌ترین اندازه را خواهد داشت چون برابر $A'B'$ است.

$$\text{Min}\,|AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2+16^2} = 20$$



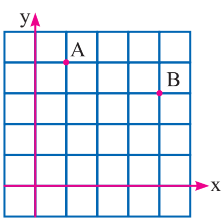
۲۱۵۳. نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ مفروض است، نقطهٔ M روی محور yها و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول می‌لغزند، کم‌ترین محیط مثلث AMN کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\sqrt{10}$
۴) $2\sqrt{5}$



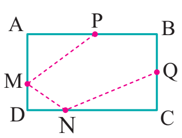
۲۱۵۴. در شبکهٔ شطرنجی زیر دو نقطهٔ ثابت A و B مفروض‌اند. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر حرکت از نقطهٔ A به طوری‌که پس از برخورد با محورهای x و y به نقطهٔ B بر سیم، برابر کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) $\sqrt{71}$
۲) $\sqrt{72}$
۳) $\sqrt{73}$
۴) $\sqrt{74}$



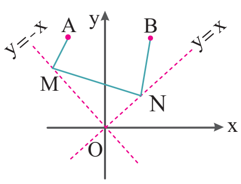
۲۱۵۵. مستطیل ABCD به اضلاع ۸ و ۶ مفروض است. اگر نقاط P و Q وسط اضلاع AB و BC باشند و نقاط M و N بر اضلاع AD و DC بلغزند، کم‌ترین طول خط شکسته PMNQ کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۱۵



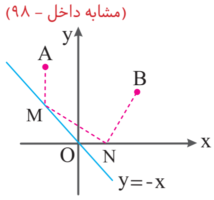
۲۱۵۶. نقاط $A\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}7\\9\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی نیمساز ناحیهٔ اول در حال لغزش هستند، کم‌ترین طول خط شکسته AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۲۰
۲) ۱۳
۳) ۱۰
۴) ۸

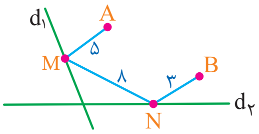


۲۱۵۷. نقاط $A\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، نقطهٔ M روی نیمساز ناحیهٔ دوم و نقطهٔ N روی قسمت مثبت محور xها می‌لغزند، کم‌ترین طول خط شکسته AMNB کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۸)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۰



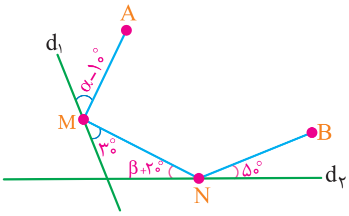
۲۱۵۸. نقاط ثابت A و B مفروض‌اند. نقطهٔ M روی خط d_1 و نقطهٔ N روی خط d_2 طوری می‌لغزد که خط شکسته $AMNB$ کمترین طول را دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d_1 و B' بازتاب B نسبت به خط d_2 باشد، اندازهٔ پاره‌خط $A'B'$ کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۱۵۹. نقاط A و B مطابق شکل مفروض‌اند. اگر نقاط M و N روی خطوط d_1 و d_2 بلغزد به‌طوری که خط شکسته $AMNB$ کم‌ترین طول را داشته باشد، زاویهٔ $\alpha+\beta$ کدام است؟

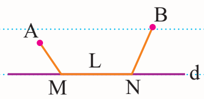


۱) 75° ۲) 70°

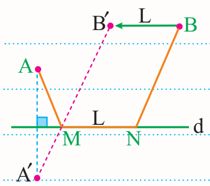
۳) 80° ۴) 85°

کاربرد مسئله هرون [تیپ سوم]

نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، نقاط M و N روی خط d به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

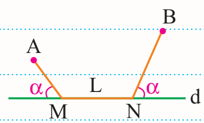


1. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.
2. نقطهٔ B را به اندازهٔ بردار $\vec{L}$ به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' به دست آید.
3. از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازهٔ L به سمت راست می‌رویم و به نقطهٔ N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکستهٔ $AMNB$ برابر است با:

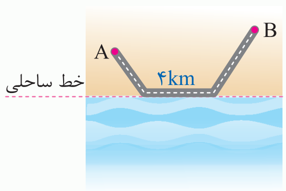


$$\boxed{Min(AMNB)=|A'B'|+L}$$

در این حالت زاویهٔ $\hat{M}$ و زاویهٔ $\hat{N}$ باید با هم برابر باشند.



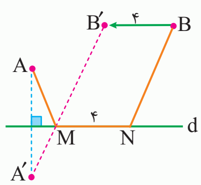
Test در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدودهٔ جادهٔ ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



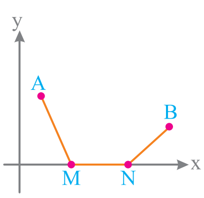
۱) بازتاب و دوران ۲) بازتاب و انتقال

۳) انتقال و تجانس ۴) دوران و تجانس

۲ باید نقطهٔ B را به اندازهٔ ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم و همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطهٔ M به دست آید اگر به اندازهٔ ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است.



۲۱۶۰. نقاط $A\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}8\\1\end{vmatrix}$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند، اگر نقاط M و N با فاصلهٔ ۳ واحد روی محور xها قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟ (مشابه داخل ـ ۹۹)



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

من در رقابت با هیچ کس جز خودم نیستم. هدف من مغلوب نمودن آخرین کاریست که انجام داده‌ام !!!

بیل گیتس

پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

ANSWERS

سُوگَند به قَلَم وَ آن چه می نِویسَند

Password

1 ۴ در ماتریسی که به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان داده می‌شود، m معرف تعداد سطرها و n معرف تعداد ستون‌هاست؛ بنابراین در این ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون وجود دارد، یعنی در هر سطر ۳ درایه و در هر ستون ۲ درایه وجود دارد.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

2 ۲ باید $n-1=3$ باشد، در نتیجه $n=4$ است، بنابراین:

① $[a_{ij}]_{4\times3}$ ← ۱۲ درایه ② $[a_{ij}]_{5\times2}$ ← ۱۰ درایه

③ $[a_{ij}]_{6\times2}$ ← ۱۲ درایه ④ $[a_{ij}]_{5\times3}$ ← ۱۵ درایه

3 ۳ در این ماتریس $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$ است، بنابراین $a_{ii}=1$ است در ضمن در سایر گزینه‌ها، گزینهٔ ③ نادرست است چون a_{31} یعنی درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول که برابر ۱ است.

$$\begin{array}{c} a_{21}\leftarrow \\ a_{31}\leftarrow \end{array}\begin{bmatrix} & & \\ 2 & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}\rightarrow a_{23}$$

4 ۴ چون شمارهٔ سطر ثابت و برابر ۲ است این درایه‌ها در سطر دوم واقع‌اند:

$$A=\begin{bmatrix} & \\ a_{21} & a_{22} \\ & \end{bmatrix}_{3\times2}\rightarrow a_{2j}\ ,\ 1\le j\le 2$$

5 ۴ درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان x و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین $x=8+5=13$ است، حال منظور از $\sum_{j=1}^{4}a_{3j}$ مجموع درایه‌های سطر سوم است، زیرا اگر j از ۱ تا ۴ تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{4}a_{3j}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=7+8+9+11=35$$

6 ۲ عبارت $\sum_{j=1}^{3}a_{2j}$ معرف مجموع درایه‌های سطر دوم و عبارت $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}$ معرف جمع کل درایه‌های ماتریس است، بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}-\sum_{j=1}^{3}a_{2j}=8-2=6$$

7 ۲ به‌جای هر کدام از درایه‌ها با توجه به تابع داده شده برحسب i و j مقدار عددی آن‌ها را قرار می‌دهیم، مثلاً در محاسبهٔ a_{12} به‌جای $i=1$ و به‌جای $j=2$ قرار می‌دهیم در نتیجه درایه‌ها به‌صورت زیر خواهند بود:

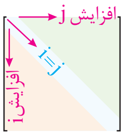
$$A=\begin{bmatrix}1^2-1&1^2-2&1^2-3\\2^2-1&2^2-2&2^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}$$ ⇐ جمع درایه‌ها = ۳

8 ۲ کافیست فقط درایه‌های سطر دوم را پیدا کنیم، یعنی $i=2$ است:

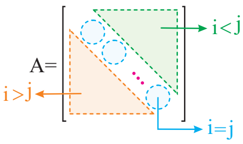
$$\begin{cases}i=2\\j=1\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix} & & \\ 3 & 0 & -5 \\ & & \end{bmatrix}$$ ⇐ جمع درایه‌ها $=3+0+(-5)=-2$

9 ۴ در ماتریس داده شده $a_{11}=1$ است که تنها گزینه‌های ③ و ④ به ازای $i=1$ و $j=1$ برابر ۱ می‌شوند، در ضمن $a_{22}=4$ است که تنها گزینهٔ ④ به ازای $i=2$ و $j=2$ برابر ۴ می‌شود، بنابراین $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ که $a_{ij}=i\times j$ باشد به‌صورت $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ است.

10 ۴ در درایه‌های بالای قطر اصلی باید شمارهٔ ستون بزرگ‌تر از شمارهٔ سطر باشد، یعنی گزینهٔ ④ تنها درایهٔ بالای قطر اصلی است و گزینه‌های ① و ② روی قطر اصلی و گزینهٔ ③ زیر قطر اصلی واقع است.



11 ۲ می‌دانیم در ماتریس‌های مربعی اگر درایه‌ها را با a_{ij} نشان دهیم روی قطر اصلی $i=j$ و بالای قطر اصلی $i<j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است:



$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1-2&1-3\\2\times1&2+2&2-3\\3\times1&3\times2&3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&-2\\&&-1\\&&6\end{bmatrix}$$

مجموع = ۳

12 ۲ درایه‌های زیر قطر اصلی به شکل زیر هستند:

$$A=\begin{bmatrix}&&\\a_{21}&&\\a_{31}&a_{32}&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\7&&\\11&10&\end{bmatrix}$$ ⇐ جمع درایه‌های زیر قطر اصلی = ۲۸

13 ۳

$$A=\begin{bmatrix} & 2x+2\\ 2-x & \end{bmatrix}\Rightarrow 2x+2=2-x\Rightarrow x=0$$

14 ۳ ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم و سپس آن‌ها را در یک ماتریس زیر هم بنویسیم (یعنی A بالا و B پایین)

$$A=\begin{bmatrix}1+1&1+2&1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1+1&1+4&1+9\\4+1&4+4&4+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&10\\5&8&13\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&3&4\\2&5&10\\5&8&13\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های ستون دوم برابر است با: $3+5+8=16$

15 ۳

$$A=\begin{bmatrix}1+1&3&3\\1&2+2&3\\1&1&3+3\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}$$ ⇐ جمع درایه‌های قطرفرعی $=1+4=5$

16 ۲ این ماتریس به‌صورت $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ است که اسکالر غیرهمانی است.